数理解析研究所講究録
148巻 1972年 25-32

Σ-space の一般化と閉写像について。

大阪教育大学　奥山晃弘

§1. 序

話を簡単にする為、空間は全て regular, T_1 空間とする。

位相空間の距離化定理として、次の定理が良く知られている。

(I) (T_1)空間 X が距離化可能である為の必要十分条件は、次の2つの条件をみたす X の開被ふくの列 $\{\mathcal{U}_n : n=1,2,\cdots\}$ が存在する事である。

(i) $\mathcal{U}^*_{n+1} < \mathcal{U}_n \quad (n=1,2,\cdots)$ 　　(star-refinement)

(ii) X の各点 x について、$\{St(x,\mathcal{U}_n) : n=1,2,\cdots\}$ が x の近傍基である。

(II) ([6],[11]) (regular T_1)空間 X が距離化可能である為の必要十分条件は、次の2つの条件をみたす X の開被ふくの列 $\{\mathcal{U}_n : n=1,2,\cdots\}$ が存在する事である。

(1) 各$\mathcal{U}_n$ が locally finite である。

(2) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_n$ がXの基となる。

距離空間の一般化として、次の様な空間がある。

定義 I（[3]）. 空間Xが上の(i)及び次の(iii)をみたす開被ふくの列 $\{\mathcal{U}_n; n=1,2,\cdots\}$ をもつ時、XをM-space という。

(iii) Xの各点xに対し $C_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}St(x,\mathcal{U}_n)$ が countably compact set で、しかも $\{St(x,\mathcal{U}_n): n=1,2,\cdots\}$ がC_xの基となる。

II（[7]）空間Xが上の定理IIの(1)及び次の(3)をみたすXの被ふく（開被ふくとは限らない）の列 $\{\mathcal{F}_n: n=1,2,\cdots\}$ をもつ時、Xをσ-space という。

(3) Xの各点x及びxを含む任意のXの開集合Gに対し $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ の中に $x\in F\subset G$ なる元Fが存在する。この時 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ をXの network という。

(ii)⇒(iii)及び(2)⇒(3)より、距離空間は常にM-space且つσ-space である。

M-space とσ-space を含み、しかもそれ等の空間のもつ良い性質をもつものとして、次の空間がある。

定義（[5]）空間Xが、次の条件をみたすXの閉被ふくの列$\{\mathfrak{F}_n : n=1,2,\cdots\}$と$X$の閉被ふく$\mathcal{K}$をもつ時、$X$を$\Sigma$-spaceという。

(a) 各$\mathfrak{F}_n$がlocally finiteである。

(b) $\mathcal{K}$の各元はcountably compact setである。

(c) $\mathcal{K}$の任意の元K及びKを含むXの任意の開集合Gに対し$K \subset F \subset G$なる$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$の元$F$が存在する。この時、$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$を$X$の(mod $\mathcal{K}$)-networkという。

Σ-spaceに関するものとして、次の定理が証明されている。

定理 A.（Nagami[5]）。fを空間Xから空間Yの上へのperfect mapとすると、

$$X : \Sigma\text{-space} \iff Y : \Sigma\text{-space}.$$

定理 B（Nagami[5]）。X_n $(n=1,2,\cdots)$を全てparacompact Σ-spacesとすると、$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$もparacompact Σ-spaceである。

σ-spaceはclosed, continuous mapで移る事は知られている。（[8], [10]）。しかしΣ-spaceに関しては移る必要がない事をMichael [1] が指摘し、次の様な空間を定義した。

定義（[1]）。空間Xが上の定義の(b), (c)及び次の(a_2)をみたす$\{\mathfrak{F}_n : n=1,2,\cdots\}$と$\mathcal{K}$をもつ時、$X$を$\Sigma^{\#}$-spaceという。

(a_2)　各 $\mathfrak{F}_n$ が closure-preserving である。

明らかに、Σ-space は $\Sigma^{\#}$-space であり、$\Sigma^{\#}$-space は closed, continuous map で移る事が分かる。ここで、Σ-space と $\Sigma^{\#}$-space の間にあるものとして、次の様な空間が定義出来る。

定義（[2], [9]）. 空間 X が上の定義の (b), (c) 及び次の (a_1) をみたす $\{\mathfrak{F}_n : n=1,2,\cdots\}$ と $\mathcal{K}$ をもつ時、X を Σ^{*}-space という。

(a_1)　各 $\mathfrak{F}_n$ が hereditarily closure-preserving である。

こゝで集合族 $\{A_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ が hereditarily closure-preserving とは $B_\lambda \subset A_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ なる任意の族 $\{B_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ が closure-preserving であるとする。

定義より、Σ-space は Σ^{*}-space であり、Σ^{*}-space は $\Sigma^{\#}$-space である。

§2. 3つの空間の関連について。

定理1. $f: X \to Y$: closed, continuous, onto map について、X が Σ^{*}-space ならば Y も Σ^{*}-space である。

定理2. X_n $(n=1,2,\cdots)$ が全べて paracompact $\Sigma^{\#}$-spaces ならば、$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ も $\Sigma^{\#}$-space である。又 paracompact Σ^{*}-space X

について、$X \times I$ が Σ^*-space ならば X が Σ-space である。

定理3. Lindelöf Σ^*-space は Σ-space である。

定理4. 任意の閉集合が F_σ-set である様な Σ^*-space は Σ-space である。

これらの結果は[9]で証明する。

更に、Michael [1] が paracompact $\Sigma^\#$, non-Σ-space X の例をあげた。その時の X は paracompact Σ-space からの closed, continuous map による image となっているので、定理1により、X は Σ^*-space となる。この X に定理2を適用すると、$X \times I$ は $\Sigma^\#$, non-Σ^*-space の例となる。従って、Σ^*-spaces の class は Σ-spaces の class より真に大きく、$\Sigma^\#$-spaces の class は Σ^*-spaces の class より真に大きい事が分かる。

又、上の空間 X について、$X \times I$ から X への projection は perfect map となるので、§1 の定理 A は Σ^*-space に対しては成立しない事になる。

定理B及び2に関連して、次の問題は未解である。

問題 1. X_n: paracompact Σ^*-space $(n=1,2,\cdots)$ の時、$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ は paracompact か？

類似の問題として、

問題 1′. X_n: sub-paracomapct Σ^*-space $(n=1,2,\cdots)$ の時、$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ は sub-paracompact か？

定理3に関連して、Σ^*-space を $\Sigma^\#$-space におきかえては成立しない事が分かる。しかし定理4については、まだ分かっていない。

問題 2. 定理4で Σ^*-space を $\Sigma^\#$-space におきかえられるか？

§3. 連続閉写像に関連して。

位相的性質 $\mathbb{P}$ について、$\mathbb{P}$ をもつ空間の class を $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ で表わし、$\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ の元からの closed, continuous map による image となる空間の class を $\mathcal{C}^{i}_{\mathbb{P}}$ で表わす。この時、§1 でのべた空間について、次の様な関係が得られている。

(A) $\mathcal{C}_M \cap \mathcal{C}_\sigma = \mathcal{C}_{metric}$.

(B) (Morita[4]). $\mathcal{C}^{i}_{M} \cap \mathcal{C}^{(i)}_{\sigma} = \mathcal{C}^{i}_{metric}$

例 1. $\mathcal{C}_{metric} \neq \mathcal{C}^{i}_{metric}$

$S = \sum_{n=1}^{\infty} [0,1]_n$: disjoint sum, $A = \{0_n \quad n=1,2,\cdots\}$ とおき、

$X = S/A$ を quotient space とすると $X \in \mathcal{C}^i_{metric} - \mathcal{C}_{metric}$.

例2. $\mathcal{C}_\sigma \neq \mathcal{C}^i_M$.

N を自然数全体, βN を N の Stone-Čech compactification とし, $p \in \beta N - N$ とする。$X = N \cup \{p\}$ を βN の subspace とすると. $X \in \mathcal{C}_\sigma - \mathcal{C}^i_M$.

例3. $\mathcal{C}_M \neq \mathcal{C}^i_{metric}$.

$X = [0, \omega_1]$ を順序による位相を入れた空間とすると、$X \in \mathcal{C}_M - \mathcal{C}^i_{metric}$. 但し、$\omega_1$ は非可算で最小の順序数.

以上をまとめると、次の様に表わされる.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}^i_M \arrow[d, phantom, sloped, "\supsetneq"] \arrow[ddrr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & & & \\
 & & \mathcal{C}_M \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & & & \\
\mathcal{C}^i_{metric} \arrow[uurr, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[ddrr, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[r, phantom, "\supsetneq"] & \mathcal{C}_{metric} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \mathcal{C}_\Sigma \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & \mathcal{C}^i_\Sigma \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathcal{C}_{\Sigma^*} \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] \arrow[d, phantom, sloped, "="] & \mathcal{C}_{\Sigma^\#} \arrow[d, phantom, sloped, "="] \\
 & & \mathcal{C}_\sigma \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[d, phantom, sloped, "="] & & & \mathcal{C}^i_{\Sigma^*} & \mathcal{C}^i_{\Sigma^\#} \\
 & & \mathcal{C}^i_\sigma \arrow[uurr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & & &
\end{tikzcd}
$$

こゝで、次の問題が残っている。

問題3. $\mathcal{C}_{\Sigma^*} = \mathcal{C}^i_{\Sigma^*}$ は成立するか？

References

1. E. Michael, On Nagami's Σ-spaces and some related matters, Proc. of the Washington State University Conference on General Topology, 13 - 19.
2. E. Michael and F. Slaughter, Jr., Σ-spaces with a point-countable separating open cover are σ-spaces, to appear.
3. K. Morita, Products of normal spaces with metric spaces, Math. Ann. 154 (1964), 365 - 382.
4. K. Morita, Results related to closed images of M-spaces III, to appear.
5. K. Nagami, Σ-spaces, Fund. Math. 65 (1969), 169 - 192.
6. J. Nagata, On a necessary and sufficient condition of metrizability, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. 1 (1950), 93 - 100.
7. A. Okuyama, Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, sect. A 9 (1967), 236 - 254.
8. A. Okuyama, σ-spaces and closed mappings I, Proc. Japan Acad., 44 (1968), 472 - 477.
9. A. Okuyama, On a generalization of Σ-spaces, to appear.
10. F. Siwiec and J. Nagata, A note on nets and metrization, Proc. Japan Acad. 44 (1968), 623 - 627.
11. Yu. M. Smirnov, A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space, Dokl. Acad. Nauk SSSR 77 (1951), 197 - 200.